

ANR

AAP générique 2019 – CE48 Fondements du numérique : informatique, automatique, traitement du signal

Projet : **Combiné**

Enumerative combinatorics interacting with algebra, number theory and physics

Combiné est un Projet de Recherche Collaborative (PRC), coordonné par Philippe Nadeau (ICJ, Lyon) avec [Jean-Christophe Aval](#) (CNRS, LaBRI)

OBJECTIFS SCIENTIFIQUES

La combinatoire énumérative est le domaine de la combinatoire qui vise à découvrir le nombre de façons dont certains motifs peuvent être formés. Le problème de la découverte d'une formule de dénombrement consiste souvent à dériver une relation de récurrence ou à générer une fonction, et à l'utiliser pour arriver à la forme souhaitée. Lorsque la formule est compliquée, une simple approximation asymptotique peut être préférable. Les combinatoristes ont aujourd'hui construit des outils puissants pour répondre aux questions énumératives, et la combinatoire énumérative a été capable de répondre à des questions profondes provenant d'autres domaines.

Notre but est de développer des techniques générales et efficaces en Combinatoire énumérative afin d'attaquer des problèmes provenant de la combinatoire, l'algèbre, la théorie des nombres et la physique. Donnons deux exemples. Le premier est la preuve de la conjecture de Razumov-Stroganov due à Cantini et Sportiello. Ce problème venait de la physique et a été résolu en utilisant de beaux arguments combinatoires. Le second exemple est le problème combinatoire du comptage des matrices de signes alternants qui a été résolu par Zeilberger puis Kuperberg. Dans sa preuve Kuperberg a lié cette question à un modèle de mécanique statistique appelé la glace carrée et utilisé des méthodes de systèmes intégrables pour le prouver. Notre objectif est de continuer à construire la combinatoire énumérative comme une thématique forte grâce à une telle approche interdisciplinaire. En particulier lorsque nous utilisons des arguments combinatoires qui donnent une bijection entre deux états équidécomposés, nous voulons aussi comprendre la structure fine des objets, leurs symétries et d'autres raffinements, afin de prouver des résultats importants dans d'autres thématiques.

ORIGINALITE DU PROJET

Nous avons accès à un large éventail de techniques pour atteindre nos objectifs. Un outil crucial dans la combinatoire énumérative est celui des séries génératrices. Nous pouvons les étudier en utilisant leurs équations fonctionnelles pour comprendre leur nature : rationnelle, algébrique, D-finie... Pour résoudre ces problèmes, nous maîtrisons un grand nombre de techniques issues de la combinatoire asymptotique et analytique, du calcul formel, des

Focus projets

systèmes intégrables et de l'algèbre. Pour prouver les identités combinatoires, nous pouvons aussi enrichir les modèles combinatoires avec certains paramètres. Ceci nous autorise alors à utiliser des techniques d'algèbre informatique, mais aussi des méthodes sophistiquées issues de séries hypergéométriques et de fonctions symétriques pour obtenir des formules énumératives. Il est également possible d'utiliser des techniques de théorie des nombres pour étudier la nature des fonctions génératrices et prouver par exemple les résultats de congruence pour leurs coefficients. La nature innovante du projet est que nous sommes tous des énumérateurs combinatoires par essence, mais nous utilisons des techniques différentes pour résoudre nos problèmes combinatoires. Nous prévoyons de faire équipe et de travailler ensemble pour construire la combinatoire du futur : un domaine fort avec beaucoup de techniques profondes. Nous croyons que ce consortium, avec ses forces en énumération, physique, théorie des nombres et algèbre, est l'équipe idéale. Nous pensons que c'est le bon moment pour ce projet, car un certain nombre d'entre nous sont maintenant des chercheurs expérimentés.

RETOMBÉES ATTENDUES

Notre proposition s'articule autour de quatre tâches principales : Intervalles de posets (ensembles dotés d'un ordre partiel), Combinatoire et mécanique statistique, Combinatoire des cartes et des marches et permutations, Problèmes énumératifs provenant de l'algèbre. Néanmoins, certaines questions sur les permutations sont liées à des objets combinatoires provenant de la mécanique statistique, certaines questions sur les intervalles de posets proviennent de l'algèbre.... Ces quatre tâches sont donc interconnectées et intéressent également les participants aux trois sites de la proposition. Parmi nos objectifs, nous pouvons citer :

- Comprendre les symétries issues de l'algèbre en définissant les bons objets combinatoires pouvant expliquer ces symétries : intervalles de Tamari, chemins, cartes.
- Développer la théorie des identités généralisées de Rogers-Ramanujan à partir de bases cristallines et d'algèbres de Lie affines. Expliquer leurs contreparties en combinatoire.
- Comprendre pourquoi les polynômes orthogonaux et les fonctions symétriques et leur combinatoire associée sont toujours centraux dans les processus d'exclusion.
- Étudier des modèles de tas de sable sur des graphes infinis et d'autres chaînes de Markov combinatoires (processus d'exclusion, modèles à 6 sommets...).
- Étudier les chemins dans le quart de plan et leurs relations avec l'algèbre.
- Étudier la relation entre les cartes et les factorisations dans le groupe symétrique et les autres groupes. Utiliser ceci pour attaquer certains problèmes de symétrie.
- Développer la combinatoire issue des algèbres affines : parallélogrammes périodiques, partitions cylindriques.